GEOMETRI EUCLID EG(2, p^n) UNTUK MEMBENTUK RANCANGAN BLOK TIDAK LENGKAP SEIMBANG

Bambang Irawanto dan Yuni Hidayati
Jurusan Matematika FMIPA UNDIP
Jl. Prof. H. Soedarto, S.H, Semarang 50275

Abstract. A Balanced Incomplete Block (BIB) design with parameters (v, b, k, r, λ) is an arrangement of v distinct objects into b bloks such that each block contains exactly k distinct objects, each object occurs in exactly r different blocks, and every pair of distinct object m_i, m_j occurs together in exactly λ blocks. Euclidean geometry EG (2, p^n) is the finite geometry of two dimensions over the Galois Field GF(p^n). By considering that the object of BIB design is same with the points of EG(2, p^n) and the blocks which contain those objects are same with the lines which contain the points from EG(2, p^n), EG (2, p^n) can be used to construct BIB design.

Keywords: Galois Field GF(p^n), Euclidean geometry EG (2, p^n)

I. PENDAHULUAN

Lapangan adalah daerah integral yang setiap elemen yang tidak nol mempunyai invers terhadap pergandaan. Jika lapangan mempunyai jumlah elemen berhingga disebut lapangan berhingga atau Galois Field [1]. Elemen-elemen dalam Galois Field dapat digunakan untuk mengkonstruksi suatu geometri berhingga, yaitu geometri yang memiliki jumlah titik yang berhingga [2].

Elemen-elemen dalam geometri berhingga dapat digunakan untuk mengkonstruksi geometri Euclid berhingga dari dimensi dua yang dinotasikan EG (2, p^n). EG (2, p^n) digunakan untuk merancang suatu Rancangan Blok Tidak Lengkap Seimbang (RBTLS).

Rancangan Blok Tidak Lengkap Seimbang (RBTLS) mempunyai definisi sebagai penyusunan v objek yang berbeda ke dalam b blok sedemikian sehingga setiap blok memuat tepat k objek yang berbeda, setiap objek terdapat di dalam tepat r blok yang berbeda, dan semua pasangan objek m_i, m_j yang berbeda terdapat di dalam tepat λ blok [3].

EG (2, p^n) dapat digunakan untuk rancangan percobaan berupa penyusunan obyek-obyek diantaranya rancangan bujur sangkar latin. Rancangan blok dalam tulisan ini dibahas penyusunan rancangan blok tidak lengkap seimbang (RBTLS), dengan mengkorespondensikan titik-titik di dalam EG (2, p^n) sebagai obyek-obyek dan garis-garis EG (2, p^n) sebagai blok-blok [3].

II. GEOMETRI EUCLID EG(2, p^n)

Lapangan adalah daerah integral yang setiap elemen yang tidak nol mempunyai invers terhadap pergandaan. F adalah suatu lapangana perluasan dari lapangan K jika K merupakan lapangan bagian dari F [4].

Selanjutnya jika K lapangan dengan $f(x)$ polinomial yang tidak konstan maka terdapatlan lapangan perluasan F dari K , dan elemen $\alpha \in F$ sedemikian sehingga $f(\alpha) = 0$ [4]. Jika lapangan F mempunyai jumlah $\alpha \in F$ berhingga disebut lapangan berhingga [1]. Lapangan dengan jumlah elemen yang berhingga yaitu p^n, dimana p bilangan prima dan n sebarang bilangan bulat positif disebut *Galois Field* GF (p^n). Elemen $\alpha \in F$ yang jumlahnya berhingga dapat digunakan untuk mengkonstruksi sebuah sistim geometri yang disebut Geometri Euclid.

Geometri Euclid (*Euclidean Geometry*) EG(m,q) dengan m dimensi terbentuk dari lapangan berhingga GF(q), dimana $q = p^n$ dan p adalah bilangan prima. Geometri Euclid dari dua dimensi atas lapangan GF(p^n) dinotasikan dengan EG (2,p^n).

Teorema 1. [2]. Geometri berhingga EG(2,p^n) mempunyai s^2 titik dan $s^2 + s$ garis, dimana $s = p^n$.

Bukti.

Ambil sebarang pasangan (x, y) dengan $x, y \in$ GFp^n. Dengan menganggap titik x dan y sebagai elemen dari GFp^n maka jumlah pasangan (x, y) sebanyak s^2, sehingga geometri berhingga EG (2, p^n) memiliki s^2 titik. Selanjutnya ambil sebarang persamaan garis $ax+by+c = 0$, dimana $a, b, c \in$ GFp^n dan $(a,b) \neq (0,0)$. Dalam hal ini diselidiki dua kejadian secara terpisah.

Kejadian 1 : $b \neq 0$

Persamaan garis $ax+by+c=0$, dengan membagi persamaan garis dengan b dan menyajikan dalam bentuk persamaan dalam x diperoleh

$$y = -\frac{a}{b}x - \frac{c}{b}\ , \qquad (2.1)$$

misal $m = -\frac{a}{b}$ dan $\beta = -\frac{c}{b}$, maka persamaan (2.1) menjadi

$$y = mx + \beta \qquad (2.2)$$

Karena setiap m dan β dianggap sebagai nilai-nilai dari $s = p^n$, sehingga jumlah garis untuk kejadian ini adalah s^2.

Kejadian 2 : $b = 0$

Jika $a \neq 0$, maka persamaan garis

$ax + by + c = 0$ menjadi $ax + c = 0$ (2.3)

Dengan membagi dengan konstanta a maka persamaan (2.3) menjadi:

$$x = -\frac{c}{a}\ , \qquad (2.4)$$

misal $\gamma = -\frac{c}{a}$, maka persamaan (2.4) menjadi

$$x = \gamma \qquad (2.5)$$

dengan menganggap γ sebagai elemen dari GFp^n, maka jumlah garis dalam kejadian ini adalah sebanyak s garis.

Dengan pengambilan kedua kejadian secara bersama diperoleh jumlah garis dalam EG (2, p^n) adalah $s^2 + s$. ■

Contoh.

Pandang geometri berhingga EG(2,2) berdasarkan lapangan GF_2. Lapangan tersebut hanya terdiri dari dua elemen yaitu 0 dan 1. Geometri berhingga EG(2, p^n) mempunyai s^2 titik dan $s^2 + s$ garis, dimana $s = p^n$. Disini $s = 2$, sehingga EG(2,2) mempunyai 4 titik, yaitu :

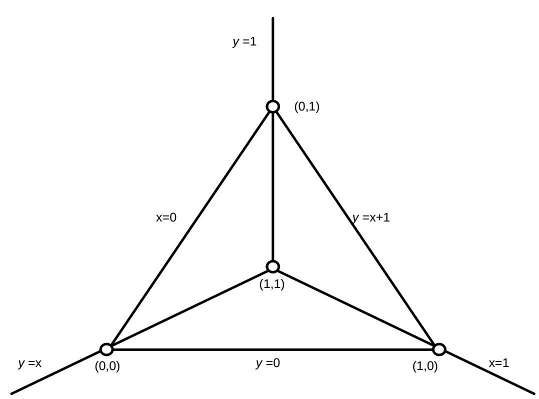
(0,0), (0,1), (1,0), (1,1)

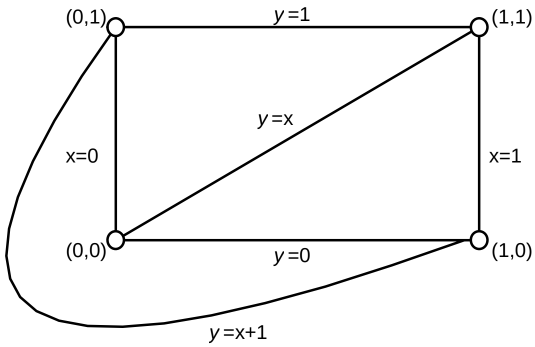
Sedangkan jumlah garisnya adalah $s^2 + s = 6$ dan ditunjukkan dalam Tabel 1.

Tabel 1**.** Tabel garis-garis pada EG (2,2)

Persamaan Garis	Titik-titik yang dihubungkan
$y = 0$	(0,0), (1,0)
$y = 1$	(0,1), (1,1)
$y = x$	(0,0), (1,1)
$y = x + 1$	(1,0), (0,1)
$x = 0$	(0,0), (0,1)
$x = 1$	(1,0), (1,1)

Geometri berhingga dari EG(2,2) dapat disajikan dengan dua cara berikut:





Gambar 1. Gambar EG (2,2)

2. RANCANGAN BLOK TIDAK LENGKAP SEIMBANG (RBTLS)

Suatu rancangan percobaan yang digunakan untuk menyusun beberapa obyek ke dalam beberapa blok

Definisi 1.

Suatu RBTLS dengan parameter-parameter (v, b, r, k, λ) dimana v adalah banyaknya objek yang akan dibagi ke dalam blok-blok $B_1, ..., B_b$. Dengan b adalah banyaknya blok yang harus dihasilkan, r adalah banyaknya blok yang memuat objek m_i, k adalah banyaknya objek dalam satu blok dan λ adalah banyaknya blok yang memuat pasangan tak terurut m_i, m_j dari objek-objek yang berbeda didefinisikan sebagai suatu penyusunan terhadap v objek yang berbeda $m_1, ..., m_v$ ke dalam b blok $B_1, ..., B_b$. Sedemikian sehingga setiap blok B_j memuat tepat k objek yang berbeda,setiap objek m_i muncul di dalam tepat r blok yang berbeda,setiap pasangan tak terurut m_i, m_j dari objek-objek yang berbeda, muncul bersama dalam tepat λ blok.

Antara blok-blok dan obyek-obyek dalam rancangan Blok tidak Lengkap seimbang (RBTLS) terdapat hubungan yang merupakan sifat dari RBTLS

Teorema 2. [3]. Terdapat dua relasi dasar dari lima parameter-parameter (v, b, r, k, λ) yang ada pada RBTLS yaitu $bk = vr$ dan $r(k-1) = \lambda(v-1)$.

Bukti.

Setiap blok dari RBTLS memuat k objek dan masing-masing dari v muncul dalam r blok, maka jumlahan keseluruhan dari objek yang muncul dalam b blok adalah bk dan vr sehingga $bk = vr$.

Suatu objek m_i muncul dalam r blok yang mana pada setiap kemunculannya berpasangan dengan $k-1$ objek dari $v-1$ objek yang tersisa. Oleh karena itu jumlah objek-objek selain dari m_i dalam blok-blok tersebut adalah $r(k-1)$. Jumlah ini sama dengan $\lambda(v-1)$ karena selain itu m_i juga harus dipasangkan dengan setiap objek dari $v-1$ objek yang tersisa tepat λ kali. Sehingga $r(k-1) = \lambda(v-1)$. ■

RBTLS dapat disajikan dalam bentuk matriks yaitu $M = (m_{ij})$,yang disebut matrik incidence dengan pengertian seperti dalam Definisi 2.

Definisi 2.
Matriks $M = (m_{ij})$, dengan $i = 1,...,v$ dan $j = 1,...,b$ adalah matriks *incidence* dari suatu RBTLS dengan parameter (v, b, r, k, λ) dengan blok-blok $B_1,...,B_b$ dan objek-objek $m_1,...m_v$ yang didefinisikan sebagai berikut.

$$m_{ij} = \begin{cases} 1, m_i \in B_j \\ 0, m_i \notin B_j \end{cases} .$$

Teorema 3 [2]. Jika $M = (m_{ij})$, dengan $i = 1,...,v$ dan $j = 1,...,b$ adalah matriks *incidence* dari suatu RBTLS dengan parameter (v, b, r, k, λ), maka $\sum_{j=1}^{b} m_{ij} = r$ dan $\sum_{i=1}^{v} m_{ij} = k$].

Bukti.

Pandang objek i, yang mana i berada diantara j blok. karena i hanya termuat di r blok dan jumlah $j = b$ blok, maka sesuai dengan Definisi 2, jumlah $m_{ij} = 1$ adalah r dan $m_{ij} = 0$ adalah b-r. Ini membuktikan persamaan $\sum_{j=1}^{b} m_{ij} = r$. Kemudian pandang blok j, yang mana blok j memuat beberapa objek dari nilai i. karena blok j hanya memuat k objek dan jumlah $i = v$ objek, maka sesuai dengan Definisi 2, jumlah $m_{ij} = 1$ adalah k dan $m_{ij} = 0$ adalah v-k. ■

3. EG (2, p^n) UNTUK MEMBENTUK RBTLS

Pembentuk RBTLS dengan menggunakan Geometri Euclid EG (2, p^n),dengan mengkorespondensikan titik-titik di dalam EG (2, p^n), sebagai obyek-obyek dan garis-garis EG (2, p^n) sebagai blok-blok.Sebagai ilustrasi pandang contoh dibawah ini

Contoh.

Misalkan suatu perusahaan susu ingin membandingkan 4 jenis susu yang diproduksinya dengan memberikan keempat jenis susu tersebut kepada 6 toko. Pada masing-masing toko akan diberikan 2 jenis susu yang berbeda. Akan dibuat suatu rancangan sedemikian sehingga setiap pasangan yang berbeda dari keempat jenis susu tersebut hanya dibandingkan oleh tepat satu toko.

Dengan memisalkan 4 jenis susu yang ingin dibandingkan tersebut dianggap sama dengan 4 titik pada EG(2, 2) dan 6 toko yang akan membandingkan dianggap sama dengan 6 garis yang memuat titik-titik dari EG(2, 2) serta 2 jenis susu yang akan dibandingkan oleh setiap toko dianggap sama dengan 2 titik yang termuat dalam sebuah garis dari EG(2, 2), maka persoalan di atas dapat diselesaikan dengan berdasarkan Geometri Euclid EG (2, 2).

Salah satu cara untuk memperoleh blok adalah dengan mengidentifikasi 4 objek (misalkan dinotasikan dengan 1, 2, 3 dan 4) dengan 4 titik dari geometri berhingga EG (2, 2). Kemudian 2 objek yang dipilih akan termuat ke dalam satu blok jika titik-titik yang berkorespondensi berada dalam satu garis. Karena setiap dua titik dihubungkan tepat oleh satu garis, maka setiap pasang objek akan terjadi di dalam tepat satu blok.

Dari titik-titik pada EG (2,2) dapat diidentifikasi objek-objeknya seperti pada Tabel 2.

Tabel 2. Tabel objek-objek berdasarkan EG (2,2)

Titik-titik dari EG (2,2)	Objek
(0,1)	1
(1,0)	2
(1,1)	3
(0,0)	4

Dengan menggunakan Tabel 1 yaitu garis-garis dari EG (2,2), dapat dibuat rancangan blok-bloknya yang ditunjukkan oleh Tabel 3. Pada Tabel 3, setiap dua blok merupakan satu *parallel pencil*, dimana blok tersebut memuat diantara 4 objek yang ada.

Tabel 2. Tabel objek-objek berdasarkan EG (2,2)

Titik-titik dari EG (2,2)	*Objek*
(0,1)	1
(1,0)	2
(1,1)	3
(0,0)	4

Tabel 3. Tabel blok-blok yang dihasilkan dari EG (2,2)

B_1: (4,2)	B_3: (4,1)	B_5: (2,1)
B_2: (4,3)	B_4: (1,3)	B_6: (2,3)

Dari Tabel 3, matriks *incidence*-nya adalah sebagai berikut :

$$M = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Disini kolom ketiga menunjukkan bahwa blok B_3 memuat objek-objek 1 dan 4 dan baris keempat menunjukkan bahwa objek 4 muncul di dalam blok-blok B_1, B_2, B_3.

Hasil dari Tabel 3 di sebut dengan Rancangan Blok Tidak Lengkap Seimbang

(RBTLS) dengan parameter $v = 4, b = 6, r = 3, k = 2, \lambda = 1$.

Dari contoh di atas dapat dilihat bahwa dalam setiap blok tidak semua objek yang ada muncul $(k < v)$, maka rancangan ini dikatakan tidak lengkap dan dikatakan seimbang karena jumlah kemunculan setiap pasangan objek yang berbeda dalam keseluruhan rancangan adalah sama, yaitu sebanyak λ kali.

4. KESIMPULAN

1. Geometri berhingga EG(2,p^n) mempunyai s^2 titik dan $s^2 + s$ garis, dimana $s = p^n$.
2. RBTLS dapat dibentuk dari geometri berhingga khususnya geometri Euclid dari dua dimensi EG (2, p^n) atas lapangan GF (p^n).
3. Geometri Euclid EG (2, p^n) dapat disajikan dalam bentuk matrik $M = (m_{ij})$ yang disebut dengan matrik *incidence*.

5. DAFTAR PUSTAKA

[1]. Bhattacarya, P.B, Jain, .S.R, Nagpaul. (1994), *Basic Abstract Algebra*, Cambridge University press,USA.

[2]. Bose R. C. & Manvel, B. (1984). *Introduction to Combinatorial Theory*. John Wiley & Sons. New York.

[3]. Van Lint, J. H. & Wilson, R. M. (1992). *A Course in Combinatorics*. Cambridge University Press. Australia.

[4]. Raisinghania MD, Aggarwal RS. (1980), *Modern Algebra*, S Chand & Company, New Delhi.